Quantum Three Wave Interaction Equation

東大・教養物理　和達三樹、大熊建司

§1　序説

非線形の場の理論は近年急速に発展し，Nonlinear Schrödinger system の量子逆散乱法による解析を始めとして成果があがっている。ここでは新たに quantum three wave interaction equation[1]（略して Q3-WI eq.）

$$\begin{cases} Q_{1t} + c_1 Q_{1x} = -\mathrm{i}\, g\, Q_3^* Q_2 \\ Q_{2t} + c_2 Q_{2x} = -\mathrm{i}\, g\, Q_3 Q_1 \\ Q_{3t} + c_3 Q_{3x} = -\mathrm{i}\, g\, Q_1^* Q_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える。ここで Q_j は場，c_j は固有速度，g は結合定数である。Q_j が C 数なら古典論の式となり，非線形光学，プラズマ物理等広範な応用分野がある。

場 Q_j を演算子として量子論に移行したとき Nonlinear Schrödinger system で成功した量子逆散乱法はそのままの形ではうまくいかず Bethe state を得るまでに至っていない。そこで直接 Bethe state をいくつか求め，一般に二体の S 行列で解が表わされること，また束縛状態も作れることを示した。

§2　Model

場 Q_j が三種とも Bose 場の場合

$$\begin{cases} [\,Q_j(x,t),\ Q_k^*(y,t)\,] = \delta_{jk}\,\delta(x-y), \\ [\,Q_j(x,t),\ Q_k(y,t)\,] = [\,Q_j^*(x,t),\ Q_k^*(y,t)\,] = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える。運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_j(x,t) = [\,H,\ Q_j(x,t)\,] \tag{2.2}$$

が (1.1) に帰着するように Hamiltonian を

$$H=\int \mathrm{d}x\{\sum_{j=1}^{3} c_j Q_j^*(\frac{\partial}{\partial x}Q_j)+g(Q_1^* Q_3^* Q_2+Q_2^* Q_3 Q_1)\}. \tag{2.3}$$

と取る。この Hamiltonian に対し粒子数に関する次の二つの保存量が存在する。

$$\begin{cases} N_A=\int \mathrm{d}x(Q_1^* Q_1+Q_2^* Q_2), \\ N_B=\int \mathrm{d}x(Q_2^* Q_2+Q_3^* Q_3). \end{cases} \tag{2.4}$$

そこで Bethe state をこの量子数で特徴づけ，$\| M, N \gg$ と表わす。状態を指定するには他に各粒子の波数を指定する必要がある。

§3 Bethe state

この節ではいくつかの簡単な Bethe state を示し，一般解を議論するための準備とする。

まず，真空状態 $|0>$ を次のように定義する。

$$Q_j(x, t)|0>=0, \quad j=1, 2, 3. \tag{3.1}$$

i) 明らかに

$$\| 0, 0 \gg = |0> \tag{3.2}$$

は energy 0 の固有状態となっている。

ii) Q_1 粒子だけ M 個あり，波数が p_j $(j=1, \cdots, M)$ の状態

$$\| M, 0 \gg = \int \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_M \, e^{i(p_1 x_1+\cdots+p_M x_M)} \times Q_1^*(x_1)\cdots Q_1^*(x_M)|0> \tag{3.3}$$

も固有状態になっている。すなわち，

$$H\| M, 0 \gg = E(M, 0)\| M, 0 \gg,$$

$$E(M, 0)=c_1(p_1+\cdots+p_M)。 \tag{3.4}$$

iii) $$\| 0, N \gg = \int \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \, e^{i(q_1 x_1+\cdots+q_N x_N)} \times Q_3^*(x_1)\cdots Q_3^*(x_N)|0> \tag{3.5}$$

も同様に波数 q_j ($j=1, \cdots, N$) を持つ N 個の Q_3 粒子で作られる状態で， energy は

$$E(0, N)=c_3(q_1+\cdots+q_N)。 \tag{3.6}$$

ⅳ)　次に $\|1, 1\gg$ と表わされる解を考える。この固有状態は次の形をしている。

$$\|1, 1\gg=\int \mathrm{d}x_1 f(x_1) Q_2^*(x_1)|0>$$

$$+\int\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 h(x_1, x_2) Q_1^*(x_1) Q_3^*(x_2), \tag{3.7}$$

これが Hamiltonian の固有状態となる条件は,

$$\begin{cases} f(x_1)=\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+q_1)x_1} S_+(\lambda_1-\mu_1), \\ h(x_1-x_2)=\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1x_1+q_1x_2)} \{\theta(x_1-x_2)+S_1(\lambda_1-\mu_1)\theta(x_2-x_1)\}, \\ E(1, 1)=c_1p_1+c_3q_1, \end{cases} \tag{3.8}$$

但し

$$p_1=(c_2-c_3)\lambda_1, \quad q_1=(c_1-c_2)\mu_1. \tag{3.9}$$

$$\theta(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 1/2 & x=0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} S_1(\nu)=(\nu-\mathrm{i}\kappa)/(\nu+\mathrm{i}\kappa), \\ S_+(\nu)=-2(c_1-c_3)/g(\nu+\mathrm{i}\kappa), \\ \kappa=g^2/2(c_1-c_2)(c_2-c_3)(c_3-c_1)。 \end{cases} \tag{3.11}$$

ここで S_1, S_+ を表現する都合上 λ_1, μ_1 を使ったがこれを各々波数 p_1, q_1 に対する運動量と呼ぶ。これ以降も同様の表記を用いる。

ⅴ)　$\|2, 1\gg$ なる解についても

$$\|2, 1\gg=\int\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 f(x_1, x_2) Q_1^*(x_1) Q_2^*(x_2)|0>$$

$$+\int\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,h(x_1, x_2, x_3)$$

$$\times Q_1^*(x_1)\,Q_1^*(x_2)\,Q_3^*(x_3)\,|\,0> \quad 。 \tag{3.12}$$

と置いて同様に求められる。解を見やすく記述する notation を次節で導入するので，この状態の具体形はそのとき示す。

§ 4 General solution

Bethe state は ket 状態の線形結合で書ける。 ket 状態の引数は粒子の種類と運動量を同時に表わせる次のような記法を用いる。各々 p_j，q_k を波数とする Q_1，Q_3 粒子とそれらの合成により得られる Q_2 粒子の各運動量を次のように表わす。

Q_1 粒子 $\cdots$ $\lambda_j = p_j/(c_2 - c_3)$,

Q_3 粒子 $\cdots$ $\mu_k = q_k/(c_1 - c_2)$,

Q_2 粒子 $\cdots$ $\lambda_j + \mu_k$,（波数は $p_j + q_k$）。 (4.1)

次に同種粒子のみを含む ket 状態を表わす。

$$|\,\lambda_1, \cdots, \lambda_M> = \int\cdots\int dx_1\cdots dx_M\,\theta(x_1 > \cdots > x_M)$$

$$\times\, e^{i(p_1x_1+\cdots+p_Mx_M)}\,Q_1^*(x_1)\cdots Q_1^*(x_M)\,|\,0> \tag{4.2}$$

$$|\,\mu_1, \cdots, \mu_N> = \int\cdots\int dx_1\cdots dx_N\,\theta(x_1 > \cdots > x_N)$$

$$\times\, e^{i(q_1x_1+\cdots+q_Nx_N)}\,Q_3^*(x_1)\cdots Q_3^*(x_N)\,|\,0> \tag{4.3}$$

$$|\,\lambda_1+\mu_1, \cdots, \lambda_L+\mu_L> = \int\cdots\int dx_1\cdots dx_L\,\theta(x_1 > \cdots > x_L)$$

$$\times\, e^{i\{(p_1+q_1)x_1+\cdots+(p_L+q_L)x_L\}}$$

$$\times\, Q_2^*(x_1)\cdots Q_2^*(x_L)\ 。 \tag{4.4}$$

但し

$$\theta(x_1 > \cdots > x_N) = \theta(x_1 - x_2)\,\theta(x_2 - x_3)\cdots\theta(x_{N-1} - x_N)\ 。$$

複数種の粒子が含まれる ket 状態の表現も容易に想像つくと思われる。一例を示す。

$$|\lambda_1, \lambda_2+\mu_1, \mu_2> = \int\int\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, \theta(x_1>x_2>x_3)$$
$$\times e^{i\{p_1x_1+(p_2+q_1)x_2+q_2x_3\}}$$
$$\times Q_1^*(x_1)\, Q_2^*(x_2)\, Q_3^*(x_3)\, |0> \tag{4.5}$$

以上の notation を使うと $\|1, 1\gg$, $\|2, 1\gg$ は次のように表わせる。

$$\|1, 1\gg = \alpha\{|\lambda_1, \mu_1> + S_1(\lambda_1-\mu_1)|\mu_1, \lambda_1>$$
$$+ S_+(\lambda_1-\mu_1)|\lambda_1+\mu_1>\} \tag{4.6}$$

$$\|2, 1\gg \beta[|\lambda_1, \lambda_2, \mu_1> + S_1(\lambda_2-\mu_1)|\lambda_1, \mu_1, \lambda_2>$$
$$+ S_1(\lambda_1-\mu_1)S_1(\lambda_2-\mu_1)|\mu_1, \lambda_1, \lambda_2>$$
$$+ S_2(\lambda_1-\lambda_2)\{|\lambda_2, \lambda_1, \mu_1> + S_1(\lambda_1-\mu_1)|\lambda_2, \mu_1, \lambda_1>$$
$$+ S_1(\lambda_1-\mu_1)S_1(\lambda_2-\mu_1)|\mu_1, \lambda_2, \lambda_1>\}$$
$$+ S_+(\lambda_2-\mu_1)\{|\lambda_1, \lambda_2+\mu_1> + S_1(\lambda_1-\mu_1)S_2(\lambda_1-\lambda_2)|\lambda_2$$
$$+\mu_1, \lambda_1>\} + S_+(\lambda_1-\mu_1)\{S_1(\lambda_2-\mu_1)|\lambda_1+\mu_1, \lambda_2>$$
$$+ S_2(\lambda_1-\mu_1)|\lambda_2, \lambda_1+\mu_1> \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} S_1(\nu) = (\nu - i\kappa)/(\nu + i\kappa), \\ S_2(\nu) = (\nu + 2i\kappa)/(\nu - 2i\kappa), \\ S_+(\nu) = -2(c_1 - c_3)/g(\nu + i\kappa)\ . \end{cases} \tag{4.8}$$

次に一般の Bethe state の作り方を示すが，それは (4.8) の三個の二体の S 行列を用いて表わせる。$MN=0$ の解はわかっているので $MN \neq 0$ を仮定する。 Bethe state は次の二段階を経て作られる。

$\boxed{1}$ Q_1 粒子M個，Q_3 粒子N個（Q_2 なし）の項

$\| M, N \gg$ には Q_1，Q_3 粒子を各々 M，N 個含む ket 状態があり，運動量を $\lambda_1, \cdots, \lambda_M$；$\mu_1, \cdots, \mu_N$ とすると，その中に次の形の状態がある。

$$\alpha \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_M, \mu_1, \cdots, \mu_N > \tag{4.9}$$

ここで α は定数でこれを指定すると，固有状態は一意的に決まる。

（1－1） Energy

Bethe state の energy 固有値は

$$E(M, N) = c_1(p_1 + \cdots + p_M) + c_3(q_1 + \cdots + q_N) \tag{4.10}$$

（1－2） 置換項の係数

この段階 $\boxed{1}$ で求めたいのは（4.9）の引数の入れ換えにより得られる ket 状態である。それらは次の二つの規則により全て得られる。

① $\beta \mid \cdots, \lambda_j, \mu_k, \cdots > \to \beta S_1(\lambda_j - \mu_k) \mid \cdots, \mu_k, \lambda_j, \cdots >$

② $\gamma \mid \cdots, \nu_j, \nu_k, \cdots > \to \gamma S_2(\nu_j - \nu_k) \mid \cdots, \nu_k, \nu_j, \cdots >$

$\nu = \lambda$ or μ また，$j < k$

上の①，②を使って $(M+N)$ 個の項が得られる。

$\boxed{2}$ Q_2 粒子が l 個（$l = 1, 2, \cdots, \min(M, N)$）の項

すでに得られている項から，Q_2 粒子をそれより一個多く含む項を次の規則により順次求めていく。

$$\delta \mid \cdots, \lambda_j, \mu_k, \cdots > \to \delta S_+(\lambda_j - \mu_k) \mid \cdots, \lambda_j + \mu_k, \cdots >$$

この操作を縮約と呼ぶ。

実際に $\| 1, 1 \gg$，$\| 2, 1 \gg$ を上の規則で作ってみると，（4.6），（4.7）に帰着する。

§5 Bound state

この節では運動量を complex に取り束縛状態を作ってみる。$\| 2, 1 \gg$ で運動量と波数を次のように取る。

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - \mathrm{i}\,\kappa, \quad \lambda_2 = \lambda + \mathrm{i}\,\kappa \\ p = (c_2 - c_3)\,\lambda,\ q = (c_1 - c_2)\,\mu \\ \lambda,\ \mu : \text{real} \end{cases} \tag{5.1}$$

すると， Bethe state と energy は各々

$$E(2,1) = 2c_1 p + c_3 q,$$

$$\| 2, 1 \gg = \iint \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 f(x_1, x_2) Q_1^*(x_1) Q_2^*(x_2) | 0 >$$

$$+ \iiint \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 h(x_1, x_2, x_3) Q_1^*(x_1) Q_1^*(x_2) Q_3^*(x_3) | 0 >$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{-4\alpha\kappa(c_1 - c_3)}{g(\lambda - \mu + 2\mathrm{i}\kappa)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[p(x_1+x_2)+qx_2]} \mathrm{e}^{\kappa(c_2-c_3)|x_1-x_2|}$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = \frac{\alpha}{\lambda - \mu + 2\mathrm{i}\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[p(x_1+x_2)+qx_3]} \mathrm{e}^{\kappa(c_2-c_3)|x_1-x_2|}$$

$$\times \{ (\lambda - \mu + 2\mathrm{i}\kappa)\,\theta(x_1 > x_2 > x_3)$$

$$+ (\lambda - \mu)\,\theta(x_1 > x_3 > x_2)$$

$$+ (\lambda - \mu - 2\mathrm{i}\kappa)\,\theta(x_3 > x_1 > x_2) \} \tag{5.2}$$

もし，

$$\kappa(c_2 - c_3) = g^2 / 2(c_1 - c_2)(c_3 - c_1) < 0$$

なら Q_1 粒子は束縛される。同様に $\| 1, 2 \gg$ を調べると，

$$\kappa(c_1 - c_2) = g^2 / 2(c_2 - c_3)(c_3 - c_1) < 0$$

が Q_3 粒子の束縛条件となることがわかる。一般に， $\| M, N \gg$ で

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - \mathrm{i}(M-1)\kappa,\ \lambda_{j+1} = \lambda_j + 2\mathrm{i}\kappa\ (j = 1, \cdots, M-1) \\ \mu_1 = \mu + \mathrm{i}(M+1)\kappa,\ \mu_{j+1} = \mu_j + 2\mathrm{i}\kappa\ (j = 1, \cdots, N-1) \end{cases} \tag{5.3}$$

但し λ, μ が実数とすると， Q_1 及び Q_3 粒子の束縛条件は

$$c_1 < c_2 < c_3 \quad \text{or} \quad c_3 < c_2 < c_1 \tag{5.4}$$

§6 Fermion model

今まで全部 Bose 場の model を扱ったが，この節では Q_1，Q_3 が Fermi 場で，Q_2 が Bose 場の model [2] を考える。Hamiltonian を (2.3) とすると，運動方程式は (2.2) より

$$\begin{cases} Q_{1t} + c_1 Q_{1x} = \mathrm{i}\, g\, Q_3^* Q_2 \ , \\ Q_{2t} + c_2 Q_{2x} = -\mathrm{i}\, g\, Q_3 Q_1 \ , \\ Q_{3t} + c_3 Q_{3x} = -\mathrm{i}\, g\, Q_1^* Q_2 \ . \end{cases} \tag{6.1}$$

(2.4) の二演算子はこの model でも保存量となるので，その固有値で Bethe state を前と同様に $\| M, N \gg$ と表わす。§4 の Bethe state の構成法はこの model にも適用できるが，S 行列は次のように取る。

$$S_1(\nu) = -(\nu - \mathrm{i}\,\kappa)/(\nu + \mathrm{i}\,\kappa), \quad S_2(\nu) = -1,$$

$$S_+(\nu) = -2\kappa(c_1 - c_3)/g(\nu + \mathrm{i}\,\kappa) \ 。 \tag{6.2}$$

§7 まとめ

Q3-WI model の Bethe state を直接作り，束縛状態も得た。Bose 場だけでなく Fermi 場が混ざっても Bethe state は同様に作れることを示した。今後の課題として次が考えられる。

① Q-3WI model に対する統計力学

② 因子化 S 行列理論による S 行列の導出

③ この model に使える量子逆散乱法の拡張

参 考 文 献

1) M. Wadati and K. Ohkuma; J. Phys. Soc. Jpn. (to be published)

2) K. Ohkuma and M. Wadati; in preparation